

非ニュートン流体の平行円板間の層流放射流れ

II 交差粘性効果

立 花 規 良*

Laminar Radial Flow of NonNewtonian Fluid between Parallel Stationary Disks

II Cross Viscosity Effect

Motoyoshi TACHIBANA

(Received Apr. 3, 1973)

In the previous report¹⁾, it was discussed analytically the laminar radial flow between the parallel stationary disks of such a non-Newtonian fluid that its constitutive equation was expressed by the Reiner-Rivlin model of power law type. And, it was impossible to obtain the exact solution of the governing equation, except the special case.

Then, in this paper, the same flow field is analyzed, using the Reiner-Rivlin model of constant type and the obtained result is compared with the results of the approximate analysis in the previous report¹⁾ and the analysis by Schwarz and Bruce²⁾.

1 緒 言

平行円板間の層流放射流れは、流体の粘性を算定する基礎的な流れの一つで、レオメータへの応用が考えられる。そこで、前報¹⁾では、構成方程式が指数則形の Reiner-Rivlin モデルによりあらわされる非ニュートン流体が、上記の流れをするときの基礎式とその解につき検討し、厳密解を求めることが、特別な場合をのぞき、不可能であることを示し、さらに、円板に生ずる圧力分布の近似解を求めた。この結果にもとづき、本論文では、流体の構成方程式として、より単純な定数形の Reiner-Rivlin モデルをとりあげ、同じ流れ場を解析的にしらべ、級数展開法により厳密解を求め、円板に生ずる圧力や応力への交差粘性の効果を明らかにし、さらに、数値例により、前報の近似解析¹⁾や Schwarz らの解析²⁾の結果と比較検討し

た。

2 基 礎 式

以下の解析では、次のように仮定する。

- (1) 流体は、非圧縮性である。
- (2) 流れは、定常層流で、軸対称的である。
- (3) 外力は、省略する。

(4) 流体は、Reiner-Rivlin 流体で、二つの定数 [η (粘性係数) と η_c (交差粘性係数)] で特性づけられる。

今、平行な二円板が、図1のように、距離 h をへだてておかれ、二円板の共心軸を z 軸とし、この軸と二円板間の中位面の交点を原点とする円筒座標系 (r, θ, z) が定義されるものとする。

運動方程式と連続の式は、仮定 (1) ~ (3) を考え

*機械工学科

て、整理すると、

$$\rho \left[v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right] \quad (1)$$

$$0 = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right] \dots\dots (2)$$

$$\rho \left[v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] \dots\dots (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

となる。Reiner-Rivlin の構成方程式は、

$$\Gamma = \eta \Delta + \frac{1}{2} \eta_c \{ \Delta \cdot \Delta \} \dots\dots\dots (5)$$

とあらわされる³⁾。変形速度テンソル Δ の成分 Δ_{ij} は、

仮定 (2) を考慮に入れると、

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{rr} &= 2 \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \Delta_{\theta\theta} = 2 \frac{v_r}{r}, \quad \Delta_{zz} = 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \Delta_{zr} &= \Delta_{rz} = \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}, \quad \Delta_{r\theta} = \Delta_{\theta r} = 0, \quad \Delta_{\theta z} = \Delta_{z\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

となる。構成方程式中のテンソル量 $\{ \Delta \cdot \Delta \}$ の $i\ell$ 成分は、 $\Sigma \Delta_{ij} \Delta_{j\ell}$ で与えられるので、式 (6) より定式化される。これらの結果を、式 (5) に入れると応力テンソル Γ の成分 τ_{ij} として、

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rr} &= 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} + 2\eta_c \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \right], \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0 \\ \tau_{rz} &= \tau_{zr} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \eta_c \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right), \quad \tau_{\theta\theta} = 2\eta \frac{v_r}{r} + 2\eta_c \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 \\ \tau_{\theta z} &= \tau_{z\theta} = 0, \quad \tau_{zz} = 2\eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + 2\eta_c \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

がえられる。式 (7) を式 (1) ~ (3) に代入し、式 (4) を考慮に入れて整理すると、

$$\rho \left[v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right] + \eta_c \left[4 \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} - \frac{v_r \partial^2 v_z}{r \partial r \partial z} - \frac{v_r \partial^2 v_r}{r \partial z^2} - \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 - \frac{2v_r^2}{r^3} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r^2} \right) \right] \dots\dots\dots (8)$$

$$\rho \left[v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \eta_c \left[4 \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} - \frac{v_r \partial^2 v_r}{r \partial r \partial z} - \frac{v_r \partial^2 v_z}{r \partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \right] \dots\dots\dots (9)$$

となり、 θ 方向の運動方程式〔式(2)〕は、自動的に満足されることがわかる。

次に、諸量を、

$$R = \frac{r}{h/2}, \quad Z = \frac{z}{h/2}, \quad V_r = \frac{v_r}{V_0}, \quad V_z = \frac{v_z}{V_0}, \quad P = \frac{p}{\rho V_0^2}, \quad V_0 \equiv \frac{Q}{\pi h^2} \dots\dots\dots (10)$$

のように無次元化すると、式 (8) と式 (9) は、

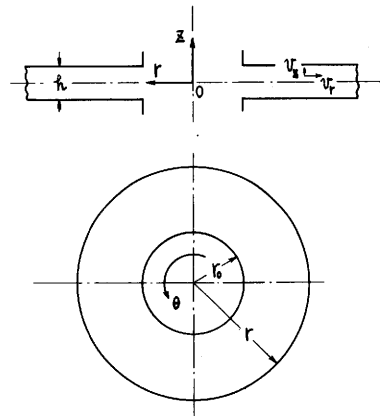


図1 座標と流れ

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial R} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_r}{\partial R} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial Z^2} - \frac{V_r}{R^2} \right] + \frac{R_r}{\text{Re}} \left[4 \frac{\partial V_r}{\partial R} \frac{\partial^2 V_r}{\partial R^2} - \frac{V_r}{R} \frac{\partial^2 V_r}{\partial Z^2} - \frac{V_r}{R} \frac{\partial^2 V_z}{\partial R \partial Z} - \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial V_r}{\partial Z} \right)^2 + \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial V_z}{\partial R} \right)^2 + \frac{2}{R} \left(\frac{\partial V_r}{\partial R} \right)^2 - 2 \frac{V_r^2}{R^3} + \left(\frac{\partial V_r}{\partial Z} + \frac{\partial V_z}{\partial R} \right) \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial R \partial Z} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial R^2} \right) \right] \quad (11)$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial R} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_z}{\partial R} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial Z^2} \right] + \frac{R_r}{\text{Re}} \left[4 \frac{\partial V_z}{\partial Z} \frac{\partial^2 V_z}{\partial Z^2} - \frac{V_r}{R} \frac{\partial^2 V_r}{\partial R \partial Z} - \frac{V_r}{R} \frac{\partial^2 V_z}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial V_r}{\partial R} \frac{\partial V_r}{\partial Z} - \frac{1}{R} \frac{\partial V_r}{\partial R} \frac{\partial V_z}{\partial R} + \left(\frac{\partial V_r}{\partial Z} + \frac{\partial V_z}{\partial R} \right) \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial R \partial Z} \right) \right] \quad (12)$$

$$\text{Re} \equiv \frac{\rho V_0 h/2}{\eta}, \quad R_r \equiv \frac{\eta_c V_0}{\eta h/2} \quad (13)$$

となる。

さらに、流れ関数 ψ を導入する。すなわち、

$$\psi_z \equiv \frac{\partial \psi}{\partial Z} = R V_r, \quad \psi_R \equiv \frac{\partial \psi}{\partial R} = -R V_z \quad (14)$$

で定義される流れ関数 ψ を用いると、速度成分 (V_r, V_z) は、

$$V_r = \frac{1}{R} \psi_z, \quad V_z = -\frac{1}{R} \psi_R \quad (14)'$$

で与えられ、式 (14) を、式 (11)、式 (12) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \psi_z \psi_{RZ} - \frac{1}{R^2} \psi_R \psi_{ZZ} - \frac{1}{R^3} \psi_z^2 = & -P_R + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{R} \psi_{RRZ} + \frac{1}{R} \psi_{ZZZ} - \frac{1}{R^2} \psi_{RZ} \right] + \frac{R_r}{\text{Re}} \left[\frac{1}{R^2} \psi_{RR} \psi_{RRR} - \frac{1}{R^2} \psi_{ZZ} \psi_{RRR} + \right. \\ & + \frac{4}{R^2} \psi_{RZ} \psi_{RRZ} - \frac{1}{R^2} \psi_{RR} \psi_{RZZ} + \frac{1}{R^2} \psi_{ZZ} \psi_{RZZ} - \frac{1}{R^3} \psi_R \psi_{RRR} - \frac{3}{R^3} \psi_z \psi_{RRZ} + \frac{1}{R^3} \psi_R \psi_{RZZ} - \frac{1}{R^3} \psi_z \psi_{ZZZ} - \frac{3}{2R^3} \psi_{RR}^2 + \\ & \left. + \frac{3}{R^3} \psi_{RR} \psi_{ZZ} - \frac{6}{R^3} \psi_{RZ}^2 - \frac{3}{2R^3} \psi_z^2 + \frac{3}{R^4} \psi_R \psi_{RR} + \frac{11}{R^4} \psi_z \psi_{RZ} - \frac{3}{R^4} \psi_R \psi_{ZZ} - \frac{3}{2R^5} \psi_R^2 - \frac{8}{R^5} \psi_z^2 \right] \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{R^2} \psi_z \psi_{RR} + \frac{1}{R^2} \psi_R \psi_{RZ} + \frac{1}{R^3} \psi_R \psi_z = & -P_z + \frac{1}{\text{Re}} \left[-\frac{1}{R} \psi_{RRR} - \frac{1}{R} \psi_{RZZ} + \frac{1}{R^2} \psi_{RR} - \frac{1}{R^3} \psi_R \right] + \\ & + \frac{R_r}{\text{Re}} \left[\frac{1}{R^2} \psi_{RR} \psi_{RRZ} - \frac{1}{R^2} \psi_{ZZ} \psi_{RRZ} + \frac{4}{R^2} \psi_{RZ} \psi_{RZZ} - \frac{1}{R^2} \psi_{RR} \psi_{ZZZ} + \frac{1}{R^2} \psi_{ZZ} \psi_{ZZZ} + \frac{1}{R^3} \psi_z \psi_{RRR} - \frac{1}{R^3} \psi_R \psi_{RRZ} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{R^3} \psi_z \psi_{RZZ} + \frac{1}{R^3} \psi_{RZ} \psi_{ZZZ} - \frac{3}{R^4} \psi_z \psi_{RR} + \frac{2}{R^4} \psi_z \psi_{ZZ} + \frac{3}{R^5} \psi_R \psi_z \right] \quad (16) \end{aligned}$$

となる。この両式から境界条件を満足するように、 ψ と P を決定すれば、解 ($V_r, V_z; P$) がえられたことになる。

3 基礎式の解

基礎式の解は、 P のべき級数に展開されたと考え、その形式は、

$$\left. \begin{aligned} \psi(R, Z) = & f_0(Z) + \frac{1}{R^2} f_2(Z) + \frac{1}{R^4} f_4(Z) + \frac{1}{R^6} f_6(Z) + \frac{1}{R^8} f_8(Z) + \frac{1}{R^{10}} f_{10}(Z) + \dots \\ P(R, Z) = & P_c + P_0 \ln R + \frac{1}{R^2} P_2(Z) + \frac{1}{R^4} P_4(Z) + \frac{1}{R^6} P_6(Z) + \frac{1}{R^8} P_8(Z) + \frac{1}{R^{10}} P_{10}(Z) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

P_c: 定数

とする。式 (17) を、式 (15)、(16) に代入し、 R のべきの同じものをまとめると、関数決定方程式として、次のような方程式がえられる。

$$P'_0 = 0, \quad f_0''' = \text{Re} \cdot P_0 \quad (18)$$

$$P'_2 = \frac{R_r}{\text{Re}} f_0'' f_0''', \quad f_2''' = \text{Re} \left[-f_0'^2 - 2P_2 + \frac{R_r}{\text{Re}} (f_0' f_0''' + \frac{3}{2} f_0''^2) \right] \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned}
 P_4' &= \frac{2}{R_e} f_2'' + \frac{R_r}{R_e} \left[f_0'' f_2''' + f_0''' f_2'' + 2f_0' f_2'' \right] \\
 f_4''' &= -8f_2' + R_e \left[-4f_0' f_2' + 2f_0'' f_2 - 4P_4 + \frac{R_r}{R_e} (f_0' f_2''' + f_0''' f_2' + 5f_0'' f_2'' + 8f_0' f_2') \right] \\
 P_6' &= 8f_0' f_2 + \frac{1}{R_e} (32f_2 + 4f_4'') + \frac{R_r}{R_e} \left[f_0'' f_4''' + f_2'' f_2''' + f_0''' f_4'' - 8f_0'' f_2 - 4f_0'' f_2' + 4f_0' f_2'' \right] \\
 f_6''' &= -24f_4' + R_e \left[-6f_0' f_4' - 3f_2'^2 + 4f_0'' f_4 + 2f_2 f_2'' - 6P_6 + \frac{R_r}{R_e} (f_0' f_4''' + f_2' f_2''' + f_0''' f_4' \right. \\
 &\quad \left. + 7f_0'' f_4'' + \frac{7}{2} f_2''^2 + 56f_0' f_2' - 48f_0'' f_2) \right] \\
 P_8' &= 24f_0' f_4 + 4f_2 f_2' + \frac{1}{R_e} (144f_4 + 6f_6'') + \frac{R_r}{R_e} \left[f_0'' f_6''' + f_2'' f_4''' + f_2''' f_4'' + f_0''' f_6'' - 24f_0'' f_4 \right. \\
 &\quad \left. - 8f_2 f_2''' - 18f_0'' f_4' + 14f_2' f_2'' + 6f_0' f_4'' - 48f_0' f_2 \right] \\
 f_8''' &= -48f_6' + R_e \left[-8f_0' f_6' - 8f_2' f_4' + 6f_0'' f_6 + 4f_2'' f_4 + 2f_2 f_4'' - 8P_8 + \frac{R_r}{R_e} (f_0' f_6''' + f_2' f_4''' + f_2''' f_4' + f_0''' f_6'' + \right. \\
 &\quad \left. + 9f_0'' f_6'' + 9f_2'' f_4'' + 120f_0' f_4' + 120f_2'^2 - 192f_0'' f_4 - 64f_2 f_2'') \right] \\
 P_{10}' &= 48f_0' f_6 + 16f_2' f_4 + \frac{1}{R_e} (384f_6 + 8f_8'') + \frac{R_r}{R_e} \left[f_0'' f_8''' + f_2'' f_6''' + f_4'' f_4''' + f_2''' f_6'' + f_0''' f_8'' \right. \\
 &\quad \left. - 48f_0'' f_6 - 24f_2''' f_4 - 8f_2 f_4''' - 40f_0'' f_6' + 16f_2'' f_4' + 32f_2' f_4'' + 8f_0' f_6'' - 192f_0' f_4 \right] \\
 f_{10}''' &= -80f_8' + R_e \left[-10f_0' f_8' - 10f_2' f_6' - 5f_4'^2 + 8f_0'' f_8 + 6f_2'' f_6 + 4f_4 f_4'' + 2f_2 f_6'' - 10P_{10} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{R_r}{R_e} (f_0' f_8''' + f_2' f_6''' + f_4' f_4''' + f_2''' f_6' + f_0''' f_8' + 11f_0'' f_8'' + 11f_2'' f_6'' + 11f_2' f_6' + \frac{11}{2} f_4''^2 \right. \\
 &\quad \left. + 208f_0' f_6' + 512f_2' f_4' - 480f_0'' f_6 - 240f_2'' f_4 - 80f_2 f_4'' + 288f_2'^2) \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

これらの方程式をとく際の境界条件は，流れ場の境界条件より，

$$\begin{aligned}
 v_r(r, \pm \frac{h}{2}) &= 0 \rightarrow V_r(R, \pm 1) = 0 \rightarrow \psi_z(R, \pm 1) = 0 \\
 v_z(r, \pm \frac{h}{2}) &= 0 \rightarrow V_z(R, \pm 1) = 0 \rightarrow -\phi_R(R, \pm 1) = 0 \\
 v_z(r, 0) &= 0 \rightarrow V_z(R, 0) = 0 \rightarrow -\phi_R(R, 0) = C \\
 \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)_{z=0} &= 0 \rightarrow \left(\frac{\partial V_r}{\partial Z} \right)_{Z=0} = 0 \rightarrow \psi_{zz}(R, 0) = 0
 \end{aligned}$$

で， z の正の半領域で考えることにすると，

$$\left. \begin{aligned}
 0 \leq Z \leq \frac{h}{2} \rightarrow 0 \leq Z \leq 1 \quad \dots\dots\dots \\
 \psi_z(R, 1) = 0, \quad \phi_R(R, 1) = 0 \\
 \phi_R(R, 0) = 0, \quad \psi_{zz}(R, 0) = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

をうる。さらに，流れ関数と流量の関係から， $\phi(R, 0) = 0$ とすると，

$$\phi(R, 1) = 1 \quad \dots\dots\dots (22)$$

がえられる。これらより， f_i に関する境界条件は，

$$\left. \begin{aligned}
 f_0(0) = f_2(0) = f_4(0) = f_6(0) = f_8(0) = f_{10}(0) = \dots = 0
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} f_0(1) = 1, \quad f_2(1) = f_4(1) = f_6(1) = f_8(1) = f_{10}(1) = \cdots = 0 \\ f'_0(1) = f'_2(1) = f'_4(1) = f'_6(1) = f'_8(1) = f'_{10}(1) = \cdots = 0 \\ f''_0(0) = f''_2(0) = f''_4(0) = f''_6(0) = f''_8(0) = f''_{10}(0) = \cdots = 0 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (23)$$

となる。式 (23) の条件のもとに、式 (18) ~ (20) をとき、それらを、式 (17) に代入すると、解は、

$$\begin{aligned} \psi(R, Z) = & \frac{3}{2} \left(Z - \frac{1}{3} Z^3 \right) + \frac{R_e}{R^2} \left[\left(\frac{3}{56} Z - \frac{33}{280} Z^3 + \frac{3}{40} Z^5 - \frac{3}{280} Z^7 \right) + \frac{R_r}{R_e} \left(\frac{3}{20} Z - \frac{3}{10} Z^3 + \frac{3}{20} Z^5 \right) \right] \\ & + \frac{R_e}{R^4} \left[\left(\frac{31}{700} Z - \frac{59}{525} Z^3 + \frac{33}{350} Z^5 - \frac{1}{35} Z^7 + \frac{1}{420} Z^9 \right) + R_e \left(\frac{5301}{431200} Z - \frac{739}{21560} Z^3 + \frac{99}{2800} Z^5 - \frac{513}{29400} Z^7 \right. \right. \\ & + \frac{1}{224} Z^9 - \frac{3}{7700} Z^{11} \left. \right) + \frac{R_r}{R_e} \left(-\frac{31}{350} Z + \frac{57}{350} Z^3 - \frac{3}{50} Z^5 - \frac{1}{70} Z^7 \right) + R_e \frac{R_r}{R_e} \left(\frac{543}{5600} Z - \frac{383}{1400} Z^3 + \frac{153}{560} Z^5 \right. \\ & \left. \left. - \frac{159}{1400} Z^7 + \frac{19}{1120} Z^9 \right) + R_e \left(\frac{R_r}{R_e} \right)^2 \left(\frac{237}{1400} Z - \frac{639}{1400} Z^3 + \frac{81}{200} Z^5 - \frac{33}{280} Z^7 \right) \right] + 0 \left(\frac{1}{R^6} \right) \cdots \cdots \cdots (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(R, Z) = & P_c - \frac{3}{R_e} \ln R - \frac{1}{R^2} \left[\frac{27}{35} + \frac{27 R_r}{20 R_e} \left(1 - \frac{10}{3} Z^2 \right) \right] + \frac{1}{R^4} \left[\frac{43}{700} - \frac{78}{2695} R_e + \frac{2769 R_r}{700 R_e} - \frac{3}{25} R_e \frac{R_r}{R_e} \right. \\ & \left. - \frac{18}{175} R_e \left(\frac{R_r}{R_e} \right)^2 + \left(-\frac{99}{140} Z^2 + \frac{3}{4} Z^4 - \frac{3}{20} Z^6 \right) + \frac{R_r}{R_e} \left(-\frac{63}{10} Z^2 + \frac{15}{4} Z^4 \right) + R_e \frac{R_r}{R_e} \left(\frac{279}{140} Z^2 - \frac{9}{2} Z^4 + \frac{27}{20} Z^6 \right) \right. \\ & \left. + R_e \left(\frac{R_r}{R_e} \right)^2 \left(\frac{27}{5} Z^2 - 9 Z^4 \right) \right] + 0 \left(\frac{1}{R^6} \right) \cdots \cdots \cdots (25) \end{aligned}$$

となる。これらの式において、 $R_r = 0$ とすると、ニュートン流体に対応し、 $1/R^2$ までの項は、Savage の解析結果¹⁾と一致する。速度 (V_r , V_z) は、式 (24) を微分し、定義式 [(式(14))'] に代入することによりえられ、有次元速度 (V_r , V_z) は、式 (10) より、

$$\left. \begin{aligned} v_r = V_0 \cdot V_r = \frac{Q}{\pi h^2} V_r = \frac{Q}{2\pi a_0 h^{3/2}} V_r = V_E \cdot \frac{1}{L_0} \cdot V_r = \frac{V_E}{L_0} V_r \\ v_z = V_0 \cdot V_z = \frac{Q}{\pi h^2} V_z = \frac{Q}{2\pi a_0 h^{3/2}} V_z = V_E \cdot \frac{1}{L_0} \cdot V_z = \frac{V_E}{L_0} V_z \\ V_E \equiv \frac{Q}{2\pi a_0 h}, \quad L_0 \equiv \frac{h^{3/2}}{r_0}, \quad V_0 \equiv \frac{V_E}{L_0}, \quad V_E \equiv V_0 L_0 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (26)$$

のような関係により導かれる。

圧力 P の定数 P_c は、 $R = R_0 (r = r_0)$ で、 $P = P_0$ となるようにきめると、

$$\begin{aligned} P_0 - P = & \frac{3}{R_e} \ln \frac{R}{R_0} - \frac{1}{R^2} \left\{ 1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \right\} \left[\frac{27}{35} + \frac{27 R_r}{20 R_e} \left(1 - \frac{10}{3} Z^2 \right) \right] + \frac{1}{R^4} \left\{ 1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^4 \right\} \left[\left\{ \frac{43}{700} - \frac{78}{2695} R_e \right. \right. \\ & + \frac{2769 R_r}{700 R_e} - \frac{3}{25} R_e \frac{R_r}{R_e} - \frac{18}{175} R_e \left(\frac{R_r}{R_e} \right)^2 \left. \right\} + \left(-\frac{99}{140} Z^2 + \frac{3}{4} Z^4 - \frac{3}{20} Z^6 \right) + \frac{R_r}{R_e} \left(-\frac{63}{10} Z^2 + \frac{15}{4} Z^4 \right) \\ & \left. + R_e \frac{R_r}{R_e} \left(\frac{279}{140} Z^2 - \frac{9}{2} Z^4 + \frac{27}{20} Z^6 \right) + R_e \left(\frac{R_r}{R_e} \right)^2 \left(\frac{27}{5} Z^2 - 9 Z^4 \right) \right] + 0 \left(\frac{1}{R^6} \right) \cdots \cdots \cdots (27) \end{aligned}$$

となる。有次元圧力 P の分布は、無次元化の諸量を考慮に入れ、整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{P_0 - P}{\rho V_E^2 L_0} = & \frac{6}{L_0 R_e} \ln X - \left\{ 1 - \left(\frac{1}{X} \right)^2 \right\} \left[\frac{54}{35} + \frac{27 R_c}{10 R_e} \left(1 - \frac{10}{3} Z^2 \right) \right] + L_0^2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{X} \right)^4 \right\} \left[\left\{ \frac{43}{350} - \frac{156 R_e}{2695 L_0} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2769 R_c}{350 R_e} - \frac{6 R_e R_c}{25 L_0 R_e} - \frac{36 R_e (R_c)}{175 L_0 R_e} \right\} + \left(-\frac{99}{70} Z^2 + \frac{3}{2} Z^4 - \frac{3}{10} Z^6 \right) + \frac{R_c}{R_e} \left(-\frac{63}{5} Z^2 - \frac{15}{2} Z^4 \right) \right. \end{aligned}$$

$$+\frac{R_E R_C}{L_0 R_E} \left(\frac{297}{70} Z^2 - 9 Z^4 + \frac{27}{10} Z^6 \right) + \frac{R_E}{L_0} \left(\frac{R_C}{R_E} \right)^2 \left(\frac{54}{5} Z^2 - 18 Z^4 \right) \Big] + O\left(\frac{1}{R^6}\right) \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\text{ただし、 } X \equiv \frac{R}{R_0} = \frac{r}{r_0}, \quad R_E \equiv \frac{\rho V_E^{1/2}}{\eta} = L_0 R_e, \quad R_C \equiv \frac{\eta_c V_E}{\eta^{1/2}} = L_0 R_c,$$

となる。円板に垂直な方向における応力は、

$$T_{zz} = -P + \tau_{zz}$$

であるので、圧力 P と同じように定数をきめ、変形整理すると、

$$\begin{aligned} -\frac{T_0 - T_{zz}}{\rho V_E^2/2} = & \frac{6}{L_0 R_E} \ln X - \left\{ 1 - \left(\frac{1}{X}\right)^2 \right\} \left(\frac{54}{35} + \frac{27 R_C}{10 R_E} \right) + L_0^2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{X}\right)^4 \right\} \left[\left\{ -\frac{107}{350} - \frac{156 R_E}{2695 L_0} + \frac{2349 R_C}{350 R_E} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{6 R_E R_C}{25 L_0 R_E} - \frac{36 R_E}{175 L_0} \left(\frac{R_C}{R_E} \right)^2 \right\} + \left(\frac{99}{70} Z^2 - \frac{3}{2} Z^4 + \frac{3}{10} Z^6 \right) + \frac{R_C}{R_E} \left(-\frac{27}{5} Z^2 + \frac{3}{2} Z^4 \right) \right] + O\left(\frac{1}{R^6}\right) \quad \dots\dots (29) \end{aligned}$$

となる。

4 数値例による検討

4・1 圧 力 分 布

平行円板間の流体の流れにより円板上に生じた圧力は、式(28)で、 $z=1$ とおけばもとめられる。すなわち、

$$\begin{aligned} \left(\frac{P_0 - P}{\rho V_E^2/2} \right)_{z=1} = & \left(\frac{P_0 - P}{\rho V_E^2/2} \right)_w = \frac{6}{L_0 R_E} \ln X - \left\{ 1 - \left(\frac{1}{X}\right)^2 \right\} \left[\frac{54}{35} - \frac{63 R_C}{10 R_E} \right] + L_0^2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{X}\right)^4 \right\} \left[-\frac{16}{175} - \frac{156 R_E}{2695 L_0} \right. \\ & \left. + \frac{492 R_C}{175 R_E} - \frac{402 R_E R_C}{175 L_0 R_E} - \frac{1296 R_E}{175 L_0} \left(\frac{R_C}{R_E} \right)^2 \right] + O\left(\frac{1}{R^6}\right) \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

このような圧力は、近似解¹⁾の特別事例としてふくまれている。そこで、本解と比較するため、条件を合致させると、圧力に対し、

$$\left(\frac{P_0 - P}{\rho V_E^2/2} \right)_w = \frac{6}{L_0 R_E} \ln X - \left\{ 1 - \left(\frac{1}{X}\right)^2 \right\} \left[\frac{6}{5} - \frac{15 R_C}{2 R_E} \right] + L_0^2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{X}\right)^4 \right\} \left(-\frac{12 R_C}{5 R_E} \right) \quad \dots\dots\dots (31)$$

表1 $\frac{(P_0 - P)_w}{\frac{\rho V_E^2}{2}} \sim X : R_E = 10^{-1} \quad (L_0 = 0.1)$

$R_E = 10^{-1}$	$R_C/R_E = 0$		$R_C/R_E = 10^{-1}$		$R_C/R_E = 1$		$R_C/R_E = 10$	
X	本 解	近似解	本 解	近似解	本 解	近似解	本 解	近似解
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1.25	133.328	133.452	133.554	133.721	135.555	136.162	151.666	160.310
2	414.731	414.990	415.204	415.550	419.391	420.593	455.087	471.015
2.5	548.477	548.766	549.006	549.394	553.701	555.043	594.231	611.532
4	830.326	830.649	830.916	831.350	836.163	837.656	882.063	900.722
8	1246.144	1246.483	1246.764	1247.219	1252.276	1253.842	1300.807	1319.917
10	1380.025	1380.366	1380.649	1381.106	1386.193	1387.767	1435.042	1454.376
20	1795.892	1796.235	1796.520	1796.979	1802.106	1803.693	1851.380	1870.808

が導かれる。

今、式 (30) と式 (31) を比較するために、 $L_0=0.1$ で、 $X=1\sim 20$ において、 $Re=10^{-1}, 1, 10$ に対し、 $Rc/Re=0\sim 10$ としたときの数値計算結果を、表 1～表 3 に示した。これらの表より、

- (1) 近似解は、本解に比し、一般に、圧力に対し、高い値を与えるが、解が有効と考えられる $Rc/Re=0$ 、すなわち、ニュートン流体の場合には、 $Re=10^{-1}\sim 1$ で、その差は 1% 以下で、近似解の有効性が容認される。これは、特に、円板流入部 ($X\sim 1, r\sim r_0$) で顕著である。
- (2) 交差粘性の存在ないしは増加は、圧力を高くす

る傾向をもつが、レイノルズ数 Re 、ライナー数 Rc の増加と共に、本解は、異常な挙動を呈し (ライナー数の影響が大きい)、解の有効域は、 $Rc\sim 1$ と推察される。このような有効域での本解と近似解の差は、 X の減少 (円板流入部に近づく) および Rc/Re の増加と共に増大する。

ことが見出される。

4・2 応力分布

非ニュートン流体では、応力成分は、一般に、

$$T_{ij} = -P + \tau_{ij}$$

とあらわされ、Reiner-Rivlin モデルでは、 τ_{ij} は、

表2 $\frac{(P_0-P)_w}{\frac{\rho V_E^2}{2}} \sim X : Re=1 (L_0=0.1)$

$Re=1$	$Rc/Re=0$		$Rc/Re=10^{-1}$		$Rc/Re=1$		$Rc/Re=10$	
X	本 解	近似解	本 解	近似解	本 解	近似解	本 解	近似解
1	0.	0	0	0	0	0	0	0
1.25	12.8290	12.9564	13.0395	13.2250	14.5408	15.6422	-8.7362	39.8514
2	40.4256	40.6890	40.8722	41.2493	44.2673	46.2915	16.3570	96.7150
2.5	53.6749	53.9694	54.1772	54.5971	58.0488	60.2460	32.4692	116.7355
4	81.7243	82.0524	82.2875	82.7531	86.6921	89.0597	65.0108	152.1133
8	123.2410	123.5852	123.8335	124.3210	128.5006	130.9440	109.2020	197.1733
10	136.6213	136.9674	137.2174	137.7075	142.0023	144.3684	122.9257	210.9775
20	178.1975	178.5462	178.7984	179.2919	183.5396	186.0035	164.9673	253.1187

表3 $\frac{(P_0-P)_w}{\frac{\rho V_E^2}{2}} \sim X : Re=10 (L_0=0.1)$

$Re=10$	$Rc/Re=0$		$Rc/Re=10^{-1}$		$Rc/Re=1$		$Rc/Re=10$	
X	本 解	近似解	本 解	近似解	本 解	近似解	本 解	近似解
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1.25	0.74869	0.90684	0.79621	1.17542	-2.69527	3.59267	-427.201	27.7651
2	2.94663	3.25890	3.13698	3.81915	-1.39844	8.86140	-665.361	59.2839
2.5	4.14445	4.48974	4.38039	5.11740	0.00938	10.76635	-686.658	67.2559
4	6.81274	7.19274	7.10358	7.89347	3.08204	14.20008	-694.402	77.2537
8	10.89911	11.29539	11.21837	12.03127	7.42828	18.65421	-690.161	84.8836
10	12.22932	12.62754	12.55209	13.36764	8.79254	20.02854	-688.586	86.6375
20	16.37652	16.77732	16.70403	17.52304	12.98609	24.23457	-684.038	91.3498

式(7)となる。それ故、法線応力 T_{zz} と圧力 P は一致しない。円板に圧力測定用計器(マノメータ, プルドン管など)を設置した場合, 圧力 P でなく, 法線応力

$-T_{zz}$ が観測される。円板上に作用する応力分布は, 式(29)において, $z=1$ とおけばえられる。すなわち,

$$\left(-\frac{T_0-T_{zz}}{\rho V_E^2/2}\right)_{z=1} = -\frac{(T_0-T)_w}{\rho V_E^2/2} = \frac{6}{L_0 R_E} \ln X - \left\{1 - \left(\frac{1}{X}\right)^2\right\} \left[\frac{54}{35} + \frac{27 R_C}{10 R_E}\right] + L_0^2 \left\{1 - \left(\frac{1}{X}\right)^4\right\} \left[-\frac{16}{175} - \frac{156 R_E}{2695 L_0} + \frac{492 R_C}{175 R_E} - \frac{6 R_E R_C}{25 L_0 R_E} - \frac{36 R_E}{175 L_0} \left(\frac{R_C}{R_E}\right)^2\right] + O\left(\frac{1}{R^8}\right) \quad (32)$$

このような応力は, Schwarz らの三次流体モデルの解析結果²⁾の特別事例としてふくまれている。彼ら

$$-\frac{(T_0-T)_w}{\rho V_E^2/2} = \frac{6}{L_0 R_E} \ln X - \left\{1 - \left(\frac{1}{X}\right)^2\right\} \left[\frac{54}{35} + \frac{27 R_C}{10 R_E}\right] + L_0^2 \left\{1 - \left(\frac{1}{X}\right)^4\right\} \left(-\frac{495 R_C}{175 R_E}\right) \quad (33)$$

で, 第二項までは, 本解と一致している。また, $R_C=0$, すなわち, ニュートン流体では, 当然のことながら, 応力は圧力に一致する。

式(32)と式(33)を比較するために, $L_0=0.1$ で, $X=1\sim 20$ において, $R_E=10^{-1}$, 1 , 10 に対し, $R_C/R_E=0\sim 10$ としたときの数値計算結果を, 表4～表6に示した。これらの表より,

- (1) 本解と Schwarz らの解は, $R_E=10^{-1}\sim 1$, $R_C=10^{-2}\sim 1$ で, ほぼ完全に一致する(差は $\pm 0.5\%$ 以下)。
- (2) $R_E=1$, $R_C=10$ および $R_E=10$, $R_C=1$ のレイノルズ数ないしはライナー数の高いときには, 応力に対し, Schwarz らの解は, 本解より高い値を与え, その傾向は, 円板流入部($X\sim 1$, $r\sim r_0$)で顕著となる。
- (3) レイノルズ数, ライナー数ともに高いとき R_E

$=10$, $R_C=10\sim 10^2$ には, 圧力のような異常な挙動がみられ, 解の有効性はうしなわれる。

(4) 解の有効域において, 応力と圧力を比較すると, 一般に, 圧力は応力より値が高く, その傾向は, X の減少および R_C/R_E の増加, と共にいちじるしくなる。

ことが見出される。

5 結 論

非ニュートン流体 (Reiner-Rivlin の定数形モデル) が平行円板間を層流状態で放射流れするときの流れ場を解析的にしらべた結果, 次のような結論がえられた。

- (1) 流れ場は, 級数展開法により厳密に解くことができる。本論文では, $1/R'$ の項までの解をえた。しかし, 解は, レイノルズ数 R_E およびライナー

表4 $-\frac{(T_0-T)_w}{\rho V_E^2/2} \sim X : R_E=10^{-1} (L_0=0.1)$

$R_E=10^{-1}$	$R_C/R_E=0$		$R_C/R_E=10^{-1}$		$R_C/R_E=1$		$R_C/R_E=10$	
X	本 解	S-B 解	本 解	S-B 解	本 解	S-B 解	本 解	S-B 解
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1.25	133.328	133.328	133.231	133.230	132.370	132.340	123.638	123.442
2	414.731	414.731	414.620	414.618	412.729	412.681	394.530	394.219
2.5	548.477	548.477	548.250	548.249	546.232	546.183	525.847	525.524
4	830.326	830.326	830.073	830.072	827.818	827.768	805.065	804.735
8	1246.144	1246.144	1245.878	1245.877	1243.510	1243.459	1219.617	1219.286
10	1380.025	1380.025	1379.758	1379.756	1377.376	1377.325	1353.347	1553.015
20	1795.892	1795.892	1795.621	1795.621	1793.222	1793.172	1769.010	1768.679

表5 $-\frac{(T_0-T)_w}{\frac{\rho V_E^2}{2}} \sim X : R_E=1 \quad (L_0=0.1)$

$R_E=1$	$R_C/R_E=0$		$R_C/R_E=10^{-1}$		$R_C/R_E=1$		$R_C/R_E=10$	
X	本 解	S-B 解	本 解	S-B 解	本 解	S-B 解	本 解	S-B 解
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1.25	12.8290	12.8290	12.6962	12.7341	11.8504	11.8441	1.9188	2.9460
2	40.4256	40.4256	40.3137	40.3774	38.3851	31.3805	18.2856	19.9183
2.5	53.6749	53.6749	53.4481	53.2485	51.3908	51.3860	29.0305	30.7275
4	81.7243	81.7243	81.4712	81.4750	79.1767	79.1717	54.4037	56.1384
8	123.2410	123.2410	122.9752	122.9791	120.5667	120.5617	94.6473	96.3885
10	136.6213	136.6213	136.3540	136.3579	133.9318	133.9269	107.8755	109.6169
20	178.1945	178.1975	177.9282	177.9321	175.4878	175.4828	149.2490	150.9906

表6 $-\frac{(T_0-T)_w}{\frac{\rho V_E^2}{2}} \sim X : R_E=10 \quad (L_0=0.1)$

$R_E=10$	$R_C/R_E=0$		$R_C/R_E=10^{-1}$		$R_C/R_E=1$		$R_C/R_E=10$	
X	本 解	S-B 解	本 解	S-B 解	本 解	S-B 解	本 解	S-B 解
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1.25	0.74869	0.74869	0.63777	0.68455	-0.46986	-0.20519	-22.3676	-9.1036
2	2.94663	2.94663	2.81298	2.88636	0.53013	0.95039	-38.5755	-17.5118
2.5	4.14445	4.14445	3.89500	3.97220	1.46954	1.90635	-40.6449	-18.7522
4	6.81274	6.81274	6.53646	6.61538	3.86552	4.31206	-41.1014	-18.7212
8	10.89911	10.89911	10.61009	10.68930	7.82379	8.27196	-38.3637	-15.9013
10	12.22932	12.22932	11.93877	12.01800	9.13876	9.58700	-37.1887	-14.7230
20	16.37652	16.37652	16.08395	16.16318	13.26567	13.71396	-33.2461	-10.7783

数 R_C が大きくなると、異常な挙動を呈し、その有効域は、 $R_E \sim 1$, $R_C \sim 1$, まです、それ以上の領域では、その有効性がうしなわれる。

- (2) 本解は、 $R_E \sim 1$, $R_C \sim 1$, で、Schwarz らの解とほぼ完全に一致する。
- (3) 本解は、ニュートン流体の場合 ($R_C=0$) において、 $R_E \sim 1$ で、圧力に対する近似解と満足すべき一致をみせる (1%以内)。すなわち、このような領域では、近似解法が有効である。
- (4) 本解によると、解の有効域において、円板に作

用する圧力は、(法線) 応力より、その値が高い。

本論文は、昭和47年10月16日、第20回レオロジー討論会で講演したものに加筆まとめた。

参 考 文 献

- 1) 立花規良, 福井大工報, **21**, (1973), 131.
- 2) W. H. Schwarz &., Chem. Eng. Sci., **24**, (1969), 399.
- 3) R. B. Bird &., "Transport Phenomena" John Wiley & Sons, (1960).
- 4) S. B. Savage, Trans. ASME., J. App. Mech., **31**-E, (1964), 594